Tentamen Integrerend project systeemtheorie, 29 januari 2010

Het tentamen bestaat uit 4 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. U moet de antwoorden beargumenteren. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Beschouw het systeem Σ gegeven door

$$\frac{d}{dt}x = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad y = (1 \;\; 0)\,x. \tag{1}$$

a. Is Σ asymptotisch stabiel?

b. Is Σ regelbaar?

c. Is Σ waarneembaar?

d. Is Σ stabilizeerbaar?

e. Ontwerp voor Σ een waarnemer waarvan de polen op -2 en -1 liggen.

f. Bestaat er een stabilizerende output feedback-regelaar voor Σ? Beargumenteer uw antwoord.

2. Beschouw het systeem Σ gegeven door

$$\frac{d}{dt}x = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad y = (1 \;\; 0 \;\; 0)\,x \tag{2}$$

Hierin is $a \in \mathbb{R}$ een constante.

a. Bepaal de transferfunctie van Σ.

b. Bepaal de impulsresponsie-functie $K(t) = Ce^{At}B$

c. Bestaan er waarden van a waarvoor het systeem asymptotisch stabiel is?

3. Beschouw het systeem

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu,$$

met $x \in \mathbb{R}^n$ en $u \in \mathbb{R}^p$. Stel

$$\mathcal{R} := \operatorname{im}\left(B\ AB\ \dots\ A^{n-1}B\right)$$

de regelbare deelruimte. Voor gegeven x_0 en input-functie u noteren we de corresponderende toestands-trajectorie door $x(t, x_0, u)$.
Definieer de *stabilizeerbare deelverzameling* van het systeem door

$$\mathcal{S} := \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \text{ zodat } \lim_{t \to \infty} x(t, x_0, u) = 0\}$$

a. Toon aan dat $\mathcal{S}$ een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$.

b. Toon aan dat $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$.

c. Bepaal een concreet systeem $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ waarvoor de inclusie in onderdeel (b.) *strikt* is.

d. Stel dat het systeem $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ stabilizeerbaar is. Toon aan dat $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$.

4. Beschouw het systeem

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad y = Cx$$

met $x \in \mathbb{R}^n$ en $y \in \mathbb{R}^p$. Definieer de waarneembaarheidsmatrix W door

$$W := \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

a. Toon aan dat $\ker(W)$ A-invariant is.

b. Stel $\mathcal{V}$ een A-invariante deelruimte van $\mathbb{R}^n$ met de eigenschap dat $\mathcal{V} \subset \ker(C)$. Toon aan dat $\mathcal{V} \subset \ker(W)$.

c. Voor een gegeven begintoestand $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noteren we de corresponderende outputfunctie door $y(t, x_0)$. Toon aan: als $x_0 \in \ker(W)$ dan geldt $y(t, x_0) = 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

d. Toon aan: als (C, A) waarneembaar is dan liggen er geen eigenvectoren van A in $\ker(C)$.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 20
Vraagstuk 2: 20
Vraagstuk 3: 25
Vraagstuk 4: 25
10 punten gratis.